05

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่งโดยใช้วิธีอนุกรมกำลังและอินทิเกรต

The Solution of the First-Order Linear Ordinary Differential Equation using Power Series and Integration Method

พิลาศลักษณ์ ศรแก้ว* และ ชนัญธิดา ปิ่นแสงแก้ว

Pilasluk Sornkaew* and Chanantida Pinsaengkaew

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยแม่โจ้

Mathematics Department, Faculty of Science, Mae Jo University

E-mail : pisorn@mju.ac.th* and mju6204105305@mju.ac.th

*Corresponding author

(Received: 29 March 2023, Revised: 28 April 2023, Accepted: 30 April 2023)

https://doi.org/10.57260/stc.2023.530

บทคัดย่อ

สมการเชิงอนุพันธ์ เป็นสมการที่มีการนำไปใช้อย่างมากมายในทางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และวิศวกรรม ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ จะมีวิธีการแก้ปัญหาหลากหลายวิธี เช่น การใช้อนุกรมอินทิเกรต วิธีการแปลงต่าง ๆ เป็นต้น ในงานวิจัยนี้ ได้นำวิธีอนุกรมกำลังและการอินทิเกรตมาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ จากการศึกษาพบว่าวิธีนี้สามารถนำมาหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง ได้อย่างมีประสิทธิภาพ พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างประกอบ

คำสำคัญ: สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง อนุกรมกำลัง อินทิเกรต

Abstract

The differential equations, it is an equation that has many uses in mathematics, science and engineering. To find solutions of differential equations, there are many solving methods such as power series, integration, transform methods etc. This research, using to Integral methods and power series were used to find the solution of the differential equations. The study found that this method can be used to find solutions of the first-order linear ordinary differential equations efficiently along with illustrating examples.

Keywords: First-order linear ordinary differential equations, Power series, Integral

บทนำ

ในปัจจุบันสมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการที่นักคณิตศาสตร์ นักวิศวกรรมและนักวิทยาศาสตร์นำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาที่เกิดขึ้นอย่างแพร่หลายในสาขาวิชาต่าง ๆ เช่น คณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และศาสตร์ขั้นสูงอื่นๆ โดยการแก้ปัญหาของสมการนั้นก็จะมีวิธีการแก้ปัญหาหลากหลายวิธีเพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น การแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้การแปลงต่างๆ การใช้อนุกรม หรือการใช้อินทิเกรต เป็นต้น โดย Rehman et al. (2016) ได้ศึกษาวิธีทำซ้ำใหม่สำหรับการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น ซึ่งผลเฉลยจะอยู่ในรูปแบบของอนุกรมแล้วเป็นผลเฉลยที่แน่นอน โดยจะแสดงถึงประสิทธิภาพของวิธีทำซ้ำใหม่ เนื่องจากเป็นวิธีการง่ายและได้ผลเฉลยที่แม่นยำยิ่งขึ้น Shiferaw (2017) ได้ศึกษาวิธีการใหม่ โดยใช้การแปลงลาปลาซของอนุกรมกำลังและแสดงบางเทอมให้อยู่ในรูปผลรวมของเทอมอนันต์ วิธีการนี้มีประโยชน์กับการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันที่ไม่มีการแปลงลาปลาซแบบองค์ประกอบ และชลกร ไทยเสถียร และคณะ (2565) ได้ศึกษาอนุกรมกำลังและการแปลงลาปลาซ มาประยุกต์กับปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ด้านต่างๆ ซึ่งผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยที่มีประสิทธิภาพและแม่นยำ

ดังนั้น ผู้วิจัยจึงมีแนวคิดในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง โดยการนำวิธีอนุกรมกำลังและอินทิเกรตมาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง ซึ่งวิธีนี้เป็นวิธีที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจ

ความรู้พื้นฐาน

สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) คือ สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ (derivative) หรือค่าเชิงอนุพันธ์ (differential) ของตัวแปรตามหนึ่งตัว หรือมากกว่าหนึ่งตัว เทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัว สมการเชิงอนุพันธ์แบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ** (Ordinary Differential Equation : ODE) และ **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย** (Partial Differential Equation : PDE) (ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์, 2549)

นิยาม 1 สมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วย อนุพันธ์สามัญของตัวแปรตามหนึ่งตัว หรือมากกว่าหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว จะเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ODE)

สมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วย อนุพันธ์ย่อยของตัวแปรตามหนึ่งตัว หรือมากกว่าหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรอิสระตั้งแต่สองตัวขึ้นไป จะเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (PDE)

นิยาม 2 อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการ จะเรียกว่า อันดับ (Order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ ระดับขั้น (Degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ เลขชี้กำลังที่เป็นจำนวนเต็มบวก และมีค่าน้อยสุด ของอนุพันธ์

ที่มีอันดับสูงสุด โดยที่สมการเชิงอนุพันธ์นั้นต้องเขียนในรูปพหุนามของอนุพันธ์ โดยที่ทุกๆ อนุพันธ์ในสมการต้องมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่างเช่น $\frac{dy}{dx}+x^2y = x$ เป็นสมการอันดับ 1 ระดับขั้น 1

$\frac{d^2y}{dx^2}+x^4\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 3$ เป็นสมการอันดับ 2 ระดับขั้น 1

$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4y^3 = 6x^2$ เป็นสมการอันดับ 1 ระดับขั้น 2

นิยาม 3 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n จะเรียกว่าเป็น**สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น** (Linear Differential Equation) ที่มีตัวแปรตาม y (ฟังก์ชันไม่ทราบค่า) และตัวแปรอิสระ x เขียนได้ในรูป

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y = f(x) \quad \text{เมื่อ} \quad a_0 \neq 0$$

โดยที่ $f(x)$ และสัมประสิทธิ์ $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ซึ่งไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูปสมการ

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y = f(x)$$

ได้จะเรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (Nonlinear Differential Equation)

นิยาม 4 จะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ว่าเป็น สมการเชิงเส้น (linear equation) ถ้า (นิธิ รุ่งธนาภิรมย์, 2563)

1. ทุก ๆ ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็น 1 เท่านั้น
2. ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปรตาม และ/หรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ
3. ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิสัยของตัวแปรตามหรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ และเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่ใช่สมการเชิงเส้นว่า สมการไม่เชิงเส้น (nonlinear equation)

ตัวอย่าง สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น เช่น

$$\frac{dy}{dx}+x^2y = x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{dy}{dx}+y = x$$

สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น เช่น

$$\frac{dy}{dx}+xy^2 = x-3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y\frac{dy}{dx}+y = x^2$$

นิยาม 5 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ และตัวแปรตามซึ่งไม่อยู่ในรูปอนุพันธ์ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์นั้น หมายความว่า เมื่อนำผลเฉลยไปแทนในสมการเชิงอนุพันธ์แล้วทำให้สมการนั้นเป็นจริง (วชิราภักษ โอรสรัมย์, 2558)

ตัวอย่าง เช่น จงแสดงวา $y = 3e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ $\frac{dy}{dx}-2y = 0$

วิธีทำ จาก $y = 3e^{2x}$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}3e^{2x} = 6e^{2x}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}-2y = 6e^{2x}-2(3e^{2x}) = 0$

จะพบวา $y = 3e^{2x}$ สอดคลองกับสมการ $\frac{dy}{dx}-2y = 0$

ดังนั้น $y = 3e^{2x}$ จึงเป็นผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx}-2y = 0$

นิยาม 6 อนุกรมกำลัง (power series) รอบจุด a เมื่อ $a \in R$ คืออนุกรมอนันต์ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

เรียก a ว่า จุดศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง (center of power series) และเรียก $c_n \in R$ ว่า สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง (coefficients of power series) (ธนัชยศ จำปาหวาย, 2564)

หมายเหตุ อนุกรมกำลังเป็นอนุกรมลู่เข้าเมื่อ $x = a$ เสมอ

ทฤษฎีบท 7 สำหรับอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ จะเป็นไปตามกรณีใดกรณีหนึ่งใน 3 กรณีนี้เท่านั้น (Ugochukwu, 2015)

1. อนุกรมลู่เข้าเฉพาะเพียงจุดเดียวที่จุดศูนย์กลาง x_0
2. มีจำนวนจริงบวก R ที่ทำให้ อนุกรมลู่เข้าทุกค่า x ซึ่ง $|x-x_0| < R$ และ อนุกรมลู่ออกทุกค่า x ซึ่ง $|x-x_0| > R$
3. อนุกรมลู่เข้าทุกค่า $x \in R$

นิยาม 8 จำนวน R ในทฤษฎีบท ข้อ 2 เรียกว่า **รัศมีแห่งการลู่เข้า** (radius of convergence) ของอนุกรมกำลัง ในข้อ 1 ให้ $R = 0$ และในข้อ 3 ให้ $R = \infty$ (Ugochukwu, 2015)

นิยาม 9 เรียกเซต $\left\{x : \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right\}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ว่า ช่วงแห่งการลู่เข้า (interval of convergent) ของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ จะได้ว่าอนุกรมกำลังที่มีรัศมีแห่งการลู่เข้า R มีช่วงแห่งการลู่เข้าแบบใดแบบหนึ่งเท่านั้น

$(a-R, a+R)$, $(a-R, a+R]$, $[a-R, a+R)$, $[a-R, a+R]$ และ $(-\infty, \infty)$ (Ugochukwu, 2015)

ทฤษฎีบท 10 การลู่เข้าที่จุดสิ้นสุด

ให้ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ เป็นอนุกรมกำลังที่มีรัศมีการลู่เข้า R เมื่อ $0 < R < \infty$ (ขนิษฐา ใจหนักดี, 2553)

1. อนุกรมลู่เข้าที่ $x = R$ (จุดสิ้นสุด) นั่นคือ อนุกรมนั้นลู่เข้าที่ช่วง $[0, R]$
2. อนุกรมลู่เข้าที่ $x = -R$ (จุดสิ้นสุด) นั่นคือ อนุกรมนั้นลู่เข้าที่ช่วง $[-R, 0]$

ในปี 2553 ขนิษฐา ใจหนักดี (2553) ได้ศึกษาทฤษฎีของการอินทิเกรต โดยได้ผลว่า

นิยาม 11 กำหนดให้ $[a, b]$ เป็นช่วงปิด และ n เป็นจำนวนเต็มบวก **พาร์ทิชัน** (patition) ของ $[a, b]$ คือเซต $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ของจำนวนจริง ซึ่ง $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

ทฤษฎีบท 12 ค่าเฉลี่ยสำหรับอินทิกรัล (The Integral Mean Value Theorem)

ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ แล้วมีจุด c ในช่วง $[a, b]$ ซึ่ง $\int_a^b f\,dx = f(c)(b-a)$

ทฤษฎีบท 13 ให้ u เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์บน $[a, b]$ และ u' อินทิเกรตได้บน $[a, b]$ ให้ f ต่อเนื่องบนเรนจ์ของ u ถ้า $u(a) = c$ และ $u(b) = d$ แล้ว

$$\int_a^b f(u(x)u'(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

ทฤษฎีบท 14 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้บน $[a, b]$ และ $f(x) = g(x)$ ทุก $x \in [a, b]$ ยกเว้นที่จุดซึ่งมีจำนวนนับถ้วน แล้ว $\int_a^b f\,dx = \int_a^b g\,dx$

ผลการวิจัย

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง โดยใช้วิธีอนุกรมและอินทิเกรต

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง โดยใช้วิธีอนุกรมกำลังและการอินทิเกรต มีวิธีการหาผลเฉลยดังนี้

จากสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)+B(t)$

แทน $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots$

จะได้

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + B(t)$$

$$\int_0^t dx = \int_0^t A(t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt + \int_0^t B(t)\, dt$$

$$= \int_0^t A(t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)\, dt + \int_0^t B(t)\, dt$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t A(t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)\, dt + \int_0^t B(t)\, dt$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ เพื่อหาค่า $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots,$ แล้วนำค่าที่ได้แทนในสมการ $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots$ จึงจะได้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots$ โดยที่ $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots,$ เป็นค่าคงที่

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dx}{dt} + 3x = 0$ โดยมีเงื่อนไข $x(0) = 1$ เมื่อผลเฉลยจริง คือ $x(t) = e^{-3t}$

วิธีทำ กำหนดให้ $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots$

จาก

$$\frac{dx}{dt} + 3x = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -3\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$= -3(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots)$$

$$dx = -3(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots)\, dt$$

$$\int_0^t dx = \int_0^t -3(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots)\, dt$$

$$x(t) = 1 - 3a_0 t - \frac{3}{2} a_1 t^2 - a_2 t^3 - \frac{3}{4} a_3 t^4 + \ldots$$

หาค่า $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$

$$
\begin{aligned}
& & a_0 &= 1 \\
a_1 &= -3a_0, & a_1 &= -3 \\
a_2 &= -\frac{3}{2}a_1, & a_2 &= \frac{9}{2} \\
a_3 &= -a_2, & a_3 &= -\frac{9}{2} \\
a_4 &= -\frac{3}{4}a_3, & a_4 &= \frac{27}{8} \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}
$$

นำค่า $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots,$ แทนในสมการ จะได้

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots \\
&= 1 - 3t + \frac{9}{2}t^2 - \frac{9}{2}t^3 + \frac{27}{8}t^4 + \ldots \\
&= e^{-3t}
\end{aligned}
$$

เช็คผลเฉลยว่า $x(t) = e^{-3t}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dx}{dt} + 3x = 0$

จะได้ $\frac{dx}{dt} = -3e^{-3t}$

ดังนั้น $\frac{dx}{dt} + 3x = -3e^{-3t} + 3(e^{-3t}) = 0$

จะพบว่า $x(t) = e^{-3t}$ สอดคล้องกับสมการ $\frac{dx}{dt} + 3x = 0$

ดังนั้น $x(t) = e^{-3t}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $\frac{dx}{dt} + 3x = 0$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ $x(t) = e^{-3t}$ ซึ่งมีค่าเท่ากันกับผลเฉลยจริง

ตัวอย่างที่ 2 หาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dt} - 4y = t$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 1$ เมื่อผลเฉลยจริง คือ $y(t) = \frac{17}{16}e^{4t} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{16}$

วิธีทำ กำหนดให้ $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots$

จาก

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} - 4y &= t \\
\frac{dx}{dt} &= 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + t \\
&= 4(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots) + t \\
dx &= (4a_0 + 4a_1 t + t + 4a_2 t^2 + 4a_3 t^3 + \ldots)\,dt \\
\int_0^t dx &= \int_0^t (4a_0 + 4a_1 t + t + 4a_2 t^2 + 4a_3 t^3 + \ldots)\,dt
\end{aligned}
$$

$$x(t) = 1+4a_0 t+\left(2a_1+\frac{1}{2}\right)t^2+\frac{4}{3}a_2 t^3+a_3 t^4+\ldots$$

หาค่า $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$

$$\begin{aligned} & & a_0 &= 1 \\ a_1 &= 4a_0, & a_1 &= 4 \\ a_2 &= 2a_1+\frac{1}{2}, & a_2 &= \frac{17}{2} \\ a_3 &= \frac{4}{3}a_2, & a_3 &= \frac{34}{3} \\ a_4 &= a_3, & a_4 &= \frac{34}{3} \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

นำค่า $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots,$ แทนในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} y(t) &= a_0+a_1 t+a_2 t^2+a_3 t^3+\ldots \\ &= 1+4t+\frac{17}{2}t^2+\frac{34}{3}t^3+\frac{34}{3}t^4+\ldots \\ &= \frac{17}{16}e^{4t}-\frac{1}{4}t-\frac{1}{16} \end{aligned}$$

เช็คผลเฉลยว่า $y(t) = \frac{17}{16}e^{4t}-\frac{1}{4}t-\frac{1}{16}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dt}-4y = t$

จะได้ $\frac{dy}{dt} = \frac{17}{4}e^{4t}-\frac{1}{4}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dt}-4y = \frac{17}{4}e^{4t}-\frac{1}{4}-4\left(\frac{17}{16}e^{4t}-\frac{1}{4}t-\frac{1}{16}\right)+t = t$

จะพบว่า $y(t) = \frac{17}{16}e^{4t}-\frac{1}{4}t-\frac{1}{16}$ สอดคล้องกับสมการ $\frac{dy}{dt}-4y = t$

ดังนั้น $y(t) = \frac{17}{16}e^{4t}-\frac{1}{4}t-\frac{1}{16}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dt}-4y = t$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ $y(t) = \frac{17}{16}e^{4t}-\frac{1}{4}t-\frac{1}{16}$ ซึ่งมีค่าเท่ากันกับผลเฉลยจริง

การอภิปรายผล

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง โดยใช้วิธีอนุกรมกำลังและการอินทิเกรตมีค่าเท่ากับผลเฉลยจริง ซึ่งวิธีการหาผลเฉลยดังกล่าวเป็นวิธีง่ายต่อการนำไปใช้และมีประสิทธิภาพ

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

ในการใช้วิธีอนุกรมกำลังและการอินทิเกรต เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง วิธีนี้สามารถนำมาแก้ปัญหาในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง ได้อย่างมีประสิทธิภาพ อีกทั้งสามารถขยายการหาผลเฉลยไปสู่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นอันดับหนึ่ง และอันดับอื่นได้

เอกสารอ้างอิง

ขนิษฐา ใจหนักดี. (2553). *ทฤษฎีของการอินทิเกรต*. ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต. บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร. สืบค้นจาก http://www.thapra.lib.su.ac.th/thesis/showthesis_th.asp?id=0000005661

ชลกร ไทยเสถียร, พิลาศลักษณ์ ศรแก้ว และ จินตนา จูมวงษ์. (2565). อนุกรมกำลังและการแปลงลาปลาซกับการประยุกต์. *รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและนวัตกรรม (มหาวิทยาลัยแม่โจ้) ครั้งที่ 3*. เชียงใหม่. ประเทศไทย. 23 มิถุนายน 2565: 486-494.

ธนัชยศ จำปาหวาย. (2564) แคลคูลัส 2 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา. สืบค้นจาก https://eledu.ssru.ac.th/thanatyod_ja/pluginfile.php/48/block_html/content/CAL2MAC1303%20-%202564.pdf?fbclid=IwAR2WL-GLaRUuayjiTW18XbLLUAh9TkMq0VPsPvjimZIVDS_g0AJIAOqQAFA

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์. (2549). *สมการเชิงอนุพันธ์*. พิมพ์ครั้งที่ 1. ปทุมธานี: สกายบุ๊กส์จำกัด. https://images-se-ed.com/ws/Storage/PDF/552284/019/5522840190734PDF.pdf

นิธิ รุ่งธนาภิรมย์. (2563). เอกสารประกอบการสอน สมการเชิงอนุพันธ์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย https://nithirungtanapirom.files.wordpress.com/2020/04/2301312-diffeq-notes-2562-2-5.pdf?fbclid=IwAR3oMENpQ7Nz65XY6uq-5i90A-CB-vHf1JIAnXSZQS9go_Rn5zrwllrs2Tc

วชิราภักษ โอรสรัมย์. (2558). สมการเชิงอนุพันธสามัญ คณะวิทยาศาสตร มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ http://blog.bru.ac.th/wp-content/uploads/bp-attachments/7286/%E0%B8%AA%E0%B8%A1%E0%B8%81%E0%B8%B2%E0%B8%A3%E0%B9%80%E0%B8%8A%E0%B8%B4%E0%B8%87%E0%B8%AD%E0%B8%99%E0%B8%B8%E0%B8%9E%E0%B8%B1%E0%B8%99%E0%B8%98%E0%B9%8C%E0%B8%AA%E0%B8%B2%E0%B8%A1%E0%B8%B1%E0%B8%8D.pdf

Rehman M.S., M. Yaseen & Kamran T. (2016). New Iterative Method for Solution of System of liner Differential Equations, *International Journal of Science and Research (IJSR)*, *5*(2), 1287-1289. https://www.ijsr.net/archive/v5i2/NOV153152.pdf

Shiferaw Geremew Kebede. (2017). Laplace Transform of power series. *International Journal of Research in Applied. Natural and Social Sciences (IJRANSS), 5*(3). 151-156.

Ugochukwu Odunukwe. (2015). The power series. Retrive from https://www.researchgate.net/publication/273699013