ความสัมพันธ์ระหว่างผลการแปลงลาปลาซและเอกลักษณ์ของนิวตัน

กำจร มุณีแก้ว*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา กรุงเทพมหานคร
*Corresponding author email: munee.j@hotmail.com

ได้รับบทความ: 11 พฤศจิกายน 2565
ได้รับบทความแก้ไข: 23 ธันวาคม 2565
ยอมรับตีพิมพ์: 8 มกราคม 2566

บทคัดย่อ

บทความนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่ออธิบายการพิสูจน์ถึงความสัมพันธ์ระหว่างผลการแปลงลาปลาซและเอกลักษณ์ของนิวตัน ที่เกี่ยวข้องกับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

กำหนดฟังก์ชัน $u(t)$ มีอนุพันธ์ต่อเนื่อง $u^{(n)}(t)$ ของอันดับเลขชี้กำลัง t_0 บน $[0,\infty)$ และเป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว $\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}u^{(m)}(t)=0$; $t \geq 0$ โดยที่พหุนามลักษณะเฉพาะ $P(x)=\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}x^{m}$ มีรากเป็น $x_1, x_2, ..., x_n$ และ $t_0 > \max(0, \max_{1\leq j\leq n} \mathrm{Re}(x_j))$ แล้ว ผลการแปลงลาปลาซ $\hat{u}(x)$ ถูกกำหนดโดยสูตร $\hat{u}(x)=\dfrac{P'(x)}{P(x)}$;$\mathrm{Re}(x)>t_0$

คำสำคัญ : ผลการแปลงลาปลาซ / เอกลักษณ์ของนิวตัน

Relationship between Laplace Transform and Newton's Identities

Kumjorn Muneekaew*

Mathematics Program, Faculty of Science and Technology ,
Bansomdejchaopraya Rajabhat University, Bangkok
*Corresponding author email: munee.j@hotmail.com

Received: 11 November 2022
Revised: 23 December 2022
Accepted: 8 January 2023

Abstract

This article aims to explain the proof of the relationship between Laplace transform and Newton's identities , which involves solving homogeneous linear differential equations with constant coefficients

Define the function $u(t)$ has a continuous derivative $u^{(n)}(t)$ of exponential order t_0 on $[0,\infty)$ and satisfies the homogeneous linear differential equation with constant coefficients $\sum_{m=0}^{n} a_{n-m} u^{(m)}(t) = 0$; $t \geq 0$ where the characteristic polynomial $P(x) = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} x^m$ has roots $x_1, x_2, \ldots, x_n$ and that $t_0 > \max(0, \max_{1 \leq j \leq n} \mathrm{Re}(x_j))$ then the Laplace transform $\hat{u}(x)$ is given by the formula: $\hat{u}(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$; $\mathrm{Re}(x) > t_0$

Keywords : Laplace transform / Newton's identities

บทนำ

เอกลักษณ์ของนิวตัน [1] มีความเกี่ยวข้องกับผลบวกของรากพหุนามที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังธรรมชาติ โดยมีหลักฐานมากมายที่กล่าวถึงเอกลักษณ์ของนิวตันด้วยวิธีการที่หลากหลาย ซึ่งนำไปประยุกต์ได้กับเมทริกซ์หรือวิยุตคณิต ดังใน [2], [4] และ [6] เป็นต้น สำหรับในบทความนี้เราจะเรียบเรียงและอธิบายการพิสูจน์แนวใหม่ที่มีความสัมพันธ์กันระหว่างผลการแปลงลาปลาซกับเอกลักษณ์ของนิวตัน เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เป็นหลัก ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาด้านคณิตศาสตร์, ฟิสิกส์ทัศนศาสตร์, ไฟฟ้าและวิศวกรรมควบคุม,ระบบสัญญาณ และทฤษฎีความน่าจะเป็น ซึ่งอาจเป็นประโยชน์แก่ นักคณิตศาสตร์, นักวิทยาศาสตร์, นักวิศวกรหรือผู้ที่สนใจเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ เป็นต้น ดังนั้นเราจึงจำเป็นต้องทำความรู้จักถึงเอกลักษณ์ของนิวตันบางรูปและผลการแปลงลาปลาซใน [1], [3] และ [5] เพิ่มเติมเสียก่อนเพื่อนำไปใช้อ้างอิงในเนื้อหา ดังนี้

1) เอกลักษณ์ของนิวตัน

ผลบวก S_k ของรากพหุนาม $P(x)$ ในรูปเลขยกกำลังที่สอดคล้องกับ $\sum_{j=1}^{k} a_{k-j} S_j = -k a_k$; $k = 1, 2, ..., n-1$ และ $n \geq 2$ โดยที่ a_k เป็นสัมประสิทธิ์ค่าคงตัวของ $P(x)$

2) ผลการแปลงลาปลาซ

กำหนด $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนที่ต่อเนื่องบน $[0, \infty)$ ที่กล่าวว่าเป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง $t_f > 0$ ถ้ามีค่าคงตัว $M_f > 0$ ที่ทำให้ $|f(t)| \leq M_f e^{t_f t}$

ซึ่งผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$ ได้กำหนดโดย

$$\hat{f}(x) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

ถ้าฟังก์ชัน $f(t)$ ที่มีทุกอนุพันธ์ต่อเนื่อง $f^{(n)}(t)$, $n \varepsilon$ □ ซึ่งเป็นอันดับเลขชี้กำลัง $t_f > 0$ บน $[0, \infty)$ แล้วฟังก์ชัน $f(t)$ และ $f^{(m)}(t)$ ยังเป็นอันดับเลขชี้กำลัง t_f และ

$$L(f^{(m)}(t)) = x^m \hat{f}(x) - \sum_{q=0}^{m-1} f^{(m-q-1)}(0) x^q \; ; \; \mathrm{Re}(x) > t_f \, , \; m = 1, 2, ..., n$$

เนื้อหา

1. การแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว โดยผลการแปลงลาปลาซ

ทฤษฎีบท กำหนดฟังก์ชัน $u(t)$ มีอนุพันธ์ต่อเนื่อง $u^{(n)}(t)$ ของอันดับเลขชี้กำลัง t_0 บน $\left[0,\infty\right)$ และเป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}u^{(m)}(t)=0 \;\; ; \; t\geq 0 \qquad ...(1)$$

สมมติว่า พหุนามลักษณะเฉพาะ $P(x)=\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}x^m$ มีรากเป็น $x_1, x_2, ..., x_n$ และ $t_0 > \max(0, \max_{1\leq j\leq n} \mathrm{Re}(x_j))$ แล้วผลการแปลงลาปลาซ $\hat{u}(x)$ กำหนดโดยสูตร

$$\hat{u}(x)=\frac{1}{P(x)}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} a_j u^{(k-j)}(0)x^{n-k-1} \;\; ; \;\; \mathrm{Re}(x)>t_0$$

การพิสูจน์ สมมติ $\mathrm{Re}(x)>t_0$ แล้ว $x\neq x_j \, ; \, j=1,2,...,n$ และ $P(x)\neq 0$

การประยุกต์ผลการแปลงลาปลาซกับสมการเชิงอนุพันธ์ (1) เราจึงได้สมการพีชคณิตเป็น $\hat{u}(x)=L(u(t))$:

$$\text{จาก} \qquad \sum_{m=0}^{n} a_{n-m}u^{(m)}(t)=0$$

$$\sum_{m=1}^{n} a_{n-m}u^{(m)}(t)+a_n u(t)=0$$

$$\sum_{m=1}^{n} a_{n-m}L(u^{(m)}(t))+a_n L(u(t))=0$$

$$\sum_{m=1}^{n} a_{n-m}\left[x^m\hat{u}(x)-\sum_{q=0}^{m-1}u^{(m-q-1)}(0)x^q\right]+a_n\hat{u}(x)=0$$

$$\sum_{m=1}^{n} a_{n-m}x^m\hat{u}(x)-\sum_{m=1}^{n} a_{n-m}\sum_{q=0}^{m-1}u^{(m-q-1)}(0)x^q+a_n\hat{u}(x)=0$$

$$\sum_{m=0}^{n} a_{n-m} x^m \hat{u}(x) = \sum_{m=1}^{n} a_{n-m} \sum_{q=0}^{m-1} u^{(m-q-1)}(0) x^q$$

$$P(x)\hat{u}(x) = \sum_{m=1}^{n} a_{n-m} [u^{(m-1)}(0) + u^{(m-2)}(0)x + u^{(m-3)}(0)x^2 + u^{(m-4)}(0)x^3$$

$$+u^{(m-5)}(0)x^4 + \ldots + u^{(0)}(0)x^{m-1}]$$

$$= a_{n-1}u^{(0)}(0) + a_{n-2}[u^{(1)}(0) + u^{(0)}(0)x]$$

$$+a_{n-3}[u^{(2)}(0) + u^{(1)}(0)x + u^{(0)}(0)x^2]$$

$$+a_{n-4}[u^{(3)}(0) + u^{(2)}(0)x + u^{(1)}(0)x^2 + u^{(0)}(0)x^3]$$

$$+a_{n-5}[u^{(4)}(0) + u^{(3)}(0)x + u^{(2)}(0)x^2 + u^{(1)}(0)x^3 + u^{(0)}(0)x^4]$$

$$+\ldots + a_0[u^{(n-1)}(0) + u^{(n-2)}(0)x + u^{(n-3)}(0)x^2 + \ldots + u^{(0)}(0)x^{n-1}]$$

$$= a_{n-1}u^{(0)}(0) + a_{n-2}u^{(1)}(0) + a_{n-3}u^{(2)}(0) + \ldots + a_0 u^{(n-1)}(0)$$

$$+a_{n-2}u^{(0)}(0)x + a_{n-3}u^{(1)}(0)x + a_{n-4}u^{(2)}(0)x + \ldots + a_0 u^{(n-2)}(0)x$$

$$+a_{n-3}u^{(0)}(0)x^2 + a_{n-4}u^{(1)}(0)x^2 + a_{n-5}u^{(2)}(0)x^2 + \ldots + a_0 u^{(n-3)}(0)x^2$$

$$+\ldots + a_0 u^{(0)}(0)x^{n-1}$$

$$= a_{n-0-1}u^{(0)}(0)x^0 + a_{n-0-2}u^{(1)}(0)x^0 + a_{n-0-3}u^{(2)}(0)x^0 + \ldots + a_0 u^{(n-0-1)}(0)x^0$$

$$+a_{n-1-1}u^{(0)}(0)x^1 + a_{n-1-2}u^{(1)}(0)x^1 + a_{n-1-3}u^{(2)}(0)x^1 + \ldots + a_0 u^{(n-1-1)}(0)x^1$$

$$+a_{n-2-1}u^{(0)}(0)x^2 + a_{n-2-2}u^{(1)}(0)x^2 + a_{n-2-3}u^{(2)}(0)x^2 + \ldots + a_0 u^{(n-2-1)}(0)x^2$$

$$+\ldots + a_0 u^{(n-(n-1)-1)}(0)x^{n-1}$$

$$= \sum_{q=0}^{n-1} [a_{n-q-1}u^{(0)}(0)x^q + a_{n-q-2}u^{(1)}(0)x^q + a_{n-q-3}u^{(2)}(0)x^q + \ldots + a_0 u^{(n-q-1)}(0)x^q]$$

$$= \sum_{q=0}^{n-1} [a_{n-(q+1)}u^{((q+1)-q-1)}(0)x^q + a_{n-(q+2)}u^{((q+2)-q-1)}(0)x^q + a_{n-(q+3)}u^{((q+3)-q-1)}(0)x^q$$

$$+\ldots + a_{n-n}u^{(n-q-1)}(0)x^q]$$

$$=\sum_{q=0}^{n-1}\sum_{m=q+1}^{n} a_{n-m}u^{(m-q-1)}(0)x^{q}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=n-k}^{n} a_{n-m}u^{(m-n+k)}(0)x^{n-k-1} \ ; \ q=n-k-1 \text{ และ } 0\le q\le n-1$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} a_{j}u^{(k-j)}(0)x^{n-k-1} \ ; \ j=n-m \text{ และ } 0\le j\le n-1$$

$$P(x)\hat{u}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} a_{j}u^{(k-j)}(0)x^{n-k-1}; \ \ \mathrm{Re}(x)>t_0$$

นั่นคือ $\hat{u}(x)=\dfrac{1}{P(x)}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} a_{j}u^{(k-j)}(0)x^{n-k-1}; \ \ \mathrm{Re}(x)>t_0$

2. อนุพันธ์ลอการิทึมของพหุนามตามผลการแปลงลาปลาซ

บทตั้ง ถ้าให้ u_0 เป็นฟังก์ชัน กำหนดโดย

$$u_0(t)=\sum_{j=1}^{n} e^{x_j t} \ ; \ t\ge 0 \qquad ...(2)$$

เมื่อ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน และสมมติให้ว่า $t_0>\max(0,\max_{1\le j\le n}\mathrm{Re}(x_j))$ แล้ว $u_0(t)$ เป็นอันดับเลขชี้กำลัง t_0 และผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันนั้นเป็นอนุพันธ์ลอการิทึมของพหุนาม $P(x)=\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}x^{m}=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ ด้วยราก $x_1, x_2, ..., x_n$ ตามลำดับ

$$\hat{u}_0(x)=\frac{P'(x)}{P(x)} \ ; \ \ \mathrm{Re}(x)>t_0$$

พิสูจน์ อาศัยผลการแปลงลาปลาซดำเนินการในความสัมพันธ์ (2) จึงได้

$$\hat{u}_0(x)=L(u_0(t))=L\Big(\sum_{j=1}^{n} e^{x_j t}\Big)$$

$$=\sum_{j=1}^{n} L(e^{x_j t})=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x-x_j}$$

$$=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\ldots+\frac{1}{x-x_n}$$

$$=[(x-x_2)(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

$$+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

$$+\ldots+(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})]\left[\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}\right]$$

นั่นคือ $\hat{u}_0(x)=\dfrac{P'(x)}{P(x)}=\left(\ln P(x)\right)'$

3. การพิสูจน์ด้วยเอกลักษณ์ของนิวตัน

ถ้า $u_0(t)$ และ t_0 เป็นตามบทตั้ง ในหัวข้อ 2 แล้ว ต่อไปเราจะแสดงการพิสูจน์อนุพันธ์ลอการิทึมที่เกี่ยวข้องกับผลบวก S_k ของรากพหุนาม $P(x)$ ที่สอดคล้องเอกลักษณ์ของนิวตันให้ทราบเป็นที่เข้าใจดังนี้

จากบทตั้ง $$u_0(t)=\sum_{j=1}^{n}e^{x_j t}\ ;\ t\ge 0$$

$$u_0^{(k)}(t)=\sum_{j=1}^{n}x_j^k e^{x_j t}$$

$$\therefore\quad u_0^{(k)}(0)=\sum_{j=1}^{n}x_j^k=S_k\ ;\ k=0,1,2,\ldots$$

จากความสัมพันธ์ $$P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^{n-k}$$

$$P'(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)a_k x^{n-k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(na_k-ka_k)x^{n-k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(na_k+\sum_{j=1}^{k}a_{k-j}S_j)x^{n-k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(S_0a_k+\sum_{j=0}^{k-1}a_jS_{k-j})x^{n-k-1} \quad ; \ S_0=n$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}a_jS_{k-j}x^{n-k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}a_ju_0^{(k-j)}(0)x^{n-k-1}$$

นั่นคือ $P'(x)=P(x)\hat{u}_0(x) \ , \mathrm{Re}(x)>t_0$

ต่อไปจะยกตัวอย่างผลการแปลงลาปลาซ โดยอาศัยอนุพันธ์ลอการิทึมของพหุนามที่สัมพันธ์เอกลักษณ์ของนิวตัน เพื่ออธิบายทำความเข้าใจกับกระบวนการหาอนุพันธ์ในแนวคิดใหม่และเป็นพื้นฐานสำหรับผู้ที่ศึกษาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ ที่จะนำแนวคิดนี้ไปประยุกต์ใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ $u'''(t)-2u''(t)-5u'(t)+6u(t)=0$

โดยสัมพันธ์กับพหุนามลักษณะเฉพาะ $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

ซึ่งสัมประสิทธิ์ $a_0=1, a_1=-2$ และ $a_2=-5$ โดยมี 1 , 3 และ -2 เป็นรากของ $P(x)$

จากความสัมพันธ์ระหว่างผลการแปลงลาปลาซและเอกลักลักษณ์ของนิวตัน

$$\hat{u}(x)=\frac{1}{P(x)}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}a_jS_{m-j}x^{n-m-1} \quad ;\mathrm{Re}(x)>t_0$$

ในที่นี้ $n=3$ และ $S_k=\sum_{j=1}^{3}x_j^k \ ; k=0,1,2$ โดยมี x_j เป็นรากของ $P(x)$ จึงได้

$$\hat{u}(x)=\frac{1}{P(x)}\sum_{m=0}^{2}\sum_{j=0}^{m}a_jS_{m-j}x^{2-m}$$

เนื่องจาก $S_0=3 \ , S_1=1+3+(-2)=2 \ , \ S_2=1^2+3^2+(-2)^2=14$ และ

$$\sum_{m=0}^{2}\sum_{j=0}^{m}a_jS_{m-j}x^{2-m}=a_0S_0x^2+(a_0S_1+a_1S_0)x+a_0S_2+a_1S_1+a_2S_0$$

$$=(1)(3)x^2+((1)(2)+(-2)(3))x+(1)(14)+(-2)(2)+(-5)(3)$$

$$=3x^2-4x-5$$

ดังนั้น $\hat{u}(x)=\dfrac{3x^2-4x-5}{x^3-2x^2-5x+6}$

หรือแสดงอีกนัยหนึ่งว่า

$P'(x)=P(x)\hat{u}(x)$ เมื่อ $\hat{u}(x)=\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{x-x_j}$ โดยมี x_j เป็นรากของ $P(x)$

จึงได้เป็น $P'(x)=P(x)\cdot\sum_{j=1}^{3}\dfrac{1}{x-x_j}$ โดยมี 1 , 3 และ -2 เป็นรากของ $P(x)$

$$=(x^3-2x^2-5x+6)\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+2}\right)$$

$$=(x-1)(x-3)(x+2)\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+2}\right)$$

$$=(x-3)(x+2)+(x-1)(x+2)+(x-1)(x-3)$$

$$=\left(x^2-x-6\right)+\left(x^2+x-2\right)+\left(x^2-4x+3\right)$$

นั่นคือ $P'(x)=3x^2-4x-5$

สรุป

กำหนดฟังก์ชัน $u(t)$ มีอนุพันธ์ต่อเนื่อง $u^{(n)}(t)$ ของอันดับเลขชี้กำลัง t_0 บน $[0,\infty)$ และสอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$\sum_{m=0}^{n}a_{n-m}u^{(m)}(t)=0$; $t\geq 0$ ที่มีความสัมพันธ์กับพหุนามลักษณะเฉพาะ

$$P(x)=\sum_{m=0}^{n}a_{n-m}x^m=\sum_{m=0}^{n}a_m x^{n-m}$$

แล้วผลการแปลงลาปลาซ $\hat{u}(x)$ คือ

$$\hat{u}(x)=\frac{1}{P(x)}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}a_j S_{m-j}x^{n-m-1} \quad ;\mathrm{Re}(x)>t_0$$

เมื่อ $S_{m-j}=\sum_{i=1}^{n}x_i^{m-j}$; $0\leq j\leq m$ และ $m=0,1,\ldots,n-1$ โดยมี x_i เป็นรากของ $P(x)$

ที่สอดคล้องเอกลักษณ์ของนิวตัน

เอกสารอ้างอิง

1. กำจร มุณีแก้ว. เอกลักษณ์ของนิวตัน.วารสารก้าวทันโลกวิทยาศาสตร์ 2564;2:1-15.
2. Baker GA. A new derivation of Newton 's identities and their application to the calculation of the eigenvalues of a matrix. Indust Appl Math 1959; 7:143-148.
3. Cîrnu MI. Newton 's identities and the Laplace transform. Amer Math Monthly 2010;117(1):67-71.
4. Kalman D. A matrix proof of Newton 's identities. Math Mag 2000;73: 313-314.
5. Spiegel MR. Theory and Problems of Laplace Transform. New York: McGraw-Hill;1965.
6. Zeillberger D. A combinatorial proof of Newton 's identities. Discrete Math 1984;49:319.