การรวมแบบคอนเวกซ์บนผลต่างสืบเนื่องของระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบใหม่ สำหรับการแก้สมการพีชคณิตไม่เชิงเส้น

Convex Combinations based on Finite Difference Method of New Iteration Method for Solving Nonlinear Algebraic Equations

สุมณฑา เที่ยงดี*
Sumontha Tiengdee
ไพชยนต์ สิริเสถียรวัฒนา**
Phaichayon Sirisathianwatthana

บทคัดย่อ

ในวิจัยนี้ผู้วิจัยจะนำเสนอระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแก้สมการพีชคณิตไม่เชิงเส้น, $f(x)=0$ โดยการใช้ผลต่างสืบเนื่องกับระเบียบวิธีการทำซ้ำที่ได้จากการกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์ 2 อันดับ และ 3 อันดับ ซึ่งระเบียบวิธีนี้จะช่วยลดจำนวนรอบการทำซ้ำและการคำนวณจำนวนฟังก์ชัน

คำสำคัญ : การรวมแบบคอนเวกซ์ / ผลต่างสืบเนื่อง / ระเบียบวิธีการทำซ้ำ

ABSTRACT

In this paper, we proposed numerical method for solving nonlinear algebraic equations, $f(x)=0$ by using finite difference with second order and third order of Taylor expansion. This method reduces the number of iterations and function calculations.

Keywords : Convex Combinations / Finite Difference / Iteration Method

*นักศึกษาประจำโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร
**อาจารย์ประจำโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

บทนำ

งานวิจัยชิ้นนี้จะศึกษาการแก้ปัญหาสมการพีชคณิตไม่เชิงเส้นที่อยู่ในรูปของสมการ $f(x)=0$ ที่ใช้หลักการกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์ คือ

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+\ldots \quad (1.1)$$

ซึ่งมีผู้คิดค้นมากมายมานานแล้วและเป็นที่รู้จักกันดี เช่น ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน ใช้การกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์ 1 อันดับ ได้สูตรการทำซ้ำดังนี้

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1.2)$$

นอกจากนี้ในปัจจุบันมีการคิดค้นกันอย่างต่อเนื่อง ในปี 2003 (He, 2003) ได้นำเสนอระเบียบวิธีการทำซ้ำใหม่ โดยใช้การกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์ 2 อันดับ ได้สูตรการทำซ้ำ คือ

$$x_{n+1}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4A(C+g(x))}}{2A}$$

เมื่อ $A=\frac{f''(x_n)}{2}$, $B=f'(x_n)-x_nf''(x_n)$ และ

$$c=f(x_n)-x_nf'(x_n)+\frac{x_n^2}{2}f''(x_n)+g(x_n)$$

ในปี 2008 (Ide, 2008) ได้นำเสนอระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบไฮบริดใหม่ โดยใช้การกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์ 3 อันดับ ได้สูตรการทำซ้ำ คือ

$$x_{n+1}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

เมื่อ $A=f''(x_n)$, $B=6f'(x_n)-2f''(x_n)x_n$ และ

$$C=6f(x_n)-6f'(x_n)x_n+f''(x_n)x_n^2$$

จากงานวิจัย 2 เรื่องสุดท้ายเป็นงานที่น่าสนใจ และผู้วิจัยมีความสนใจที่จะทำงานวิจัยนี้โดยการนำสูตรการทำซ้ำทั้งสองวิธีดังกล่าวมาจัดรูปสูตรการทำซ้ำใหม่ แล้วนำไปรวมกันแบบคอนเวกซ์ที่อยู่ในรูปของผลต่างสืบเนื่อง

วิธีดำเนินการวิจัย

จากระเบียบวิธีการทำซ้ำใหม่สำหรับแก้สมการพีชคณิต ของ (He, 2003) สามารถเขียนได้อีกรูปหนึ่ง (ให้ $g(x)=0$) คือ

$$x_{n+1}=x_n+\frac{-f'(x_n)\pm\sqrt{(f'(x_n))^2-2f''(x_n)f(x_n)}}{f''(x_n)} \quad (2.1)$$

และจากระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบไฮบริดใหม่สำหรับแก้สมการพีชคณิต ของ (Ide, 2008) สามารถเขียนได้อีกรูปหนึ่ง คือ

$$x_{n+1} = x_n + \frac{-f'(x_n) \pm \sqrt{(f'(x_n))^2 - \frac{2}{3} f''(x_n) f(x_n)}}{\frac{1}{3} f''(x_n)} \tag{2.2}$$

นำสมการ (2.1) และ (2.2) รวมกันแบบคอนเวกซ์ จะได้

$$x_{n+1} = \alpha \left[x_n + \frac{-f'(x_n) \pm \sqrt{(f'(x_n))^2 - 2f''(x_n) f(x_n)}}{f''(x_n)} \right] + (1-\alpha) \left[x_n + \frac{-f'(x_n) \pm \sqrt{(f'(x_n))^2 - \frac{2}{3} f''(x_n) f(x_n)}}{\frac{1}{3} f''(x_n)} \right] \tag{2.3}$$

เมื่อ $0 < \alpha < 1$

จัดรูปสมการ (2.3) จะได้

$$x_{n+1} = x_n + \frac{-3f'(x_n) \pm \sqrt{(3f'(x_n))^2 - 6(2\alpha+1) f''(x_n) f(x_n)}}{(2\alpha+1) f''(x_n)} \tag{2.4}$$

เมื่อ $0 < \alpha < 1$

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ 2 อันดับ คือ

$$f(x) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2} f''(x_n) \tag{2.5}$$

จัดรูปสมการ (2.5) ใหม่ , $f''(x_n)$

$$f''(x_n) = \frac{2}{(x_{n+1} - x_n)^2} \left(-f(x_n) - (x_{n+1} - x_n) f'(x_n) \right) \tag{2.6}$$

จากผลต่างสืบเนื่องข้างหลัง

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \tag{2.7}$$

นำสมการ (2.7) แทนใน สมการ (2.6) โดยให้ $x_{n+1} - x_n \approx x_n - x_{n-1}$ จะได้

$$f''(x_n) = \frac{-2(2f(x_n) - f(x_{n-1}))}{(x_n - x_{n-1})^2} \tag{2.8}$$

ต่อไปนำสมการ (2.7) และสมการ (2.8) แทนในสมการ (2.4) จัดรูปใหม่จะได้

$$x_{n+1} = x_n + \frac{(-3f(x_n) + 3f(x_{n-1}))(x_n - x_{n-1}) \pm |x_n - x_{n-1}| \sqrt{\left[3(f(x_n) - f(x_{n-1}))\right]^2 - (24\alpha+12)(-2f(x_n) + f(x_{n-1})) f(x_n)}}{(4\alpha+2)(-2f(x_n) + f(x_{n-1}))} \tag{2.9}$$

เมื่อ $0 < \alpha < 1$

ผลการวิจัย

ระเบียบวิธีการใหม่ที่ได้จากการศึกษามี 2 ระเบียบวิธี คือ Convex combinations of new iteration method and new hybrid iteration method (CNH) (Eq. 2.4) และ Convex combinations based on finite difference method of new iteration method (CFDM) (Eq. 2.9)

ตารางเปรียบเทียบ

ในการคำนวณจะใช้คอมพิวเตอร์ในการคำนวณ โดยใช้โปรแกรม Maple 13 และให้ $x_{-1}=0$ และระเบียบวิธีการใหม่ผู้วิจัยได้ทำการเปรียบเทียบกับ Newton-Raphson Method (NRM), New iteration method (NIM) และ New hybrid iteration method (NHIM)

Table 1 : $f(x)=x^3-e^{-x}=0,\ x_0=1$

Formula	n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
NRM	6	0.77288295914921011285	0.00000000000000000000
NIM	6	0.77288295914921011232	0.00000000000000000120
NHIM	6	0.77288295914921011280	0.00000000000000000011
CNH $(\alpha=0.6)$	5	0.77288295914921011285	0.00000000000000000000
CFDM $(\alpha=0.1)$	12	0.77288295914921011285	0.00000000000000000000

Table 2 : $f(x)=\sin x-0.5x=0,\ x_0=1.6$

Formula	n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
NRM	6	1.89549426703398094710	0.00000000000000000004
NIM	6	1.89549426703398094720	0.00000000000000000005
NHIM	6	1.89549426703398094720	0.00000000000000000005
CNH $(\alpha=0.8)$	5	1.89549426703398094710	0.00000000000000000004
CFDM $(\alpha=0.1)$	13	1.89549426703398094710	0.00000000000000000004

Table 3 : $f(x)=x\ln x-1.2=0,\ x_0=2$

Formula	n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
NRM	5	1.88808675302834352380	0.00000000000000000000
NIM	6	1.88808675302834352390	0.00000000000000000020
NHIM	5	1.88808675302834352380	0.00000000000000000000
CNH $(\alpha=0.5)$	5	1.88808675302834352380	0.00000000000000000000
CFDM	Nan	Nan	Nan

Table 4 : $f(x)=\tan^{-1}x=0,\ x_0=2$

Formula	n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
NRM	12	Failure	--
NIM	9	0.00000000000000000000	0.00000000000000000000
NHIM	7	0.00000000000000000000	0.00000000000000000000
CNH $(\alpha=0.5)$	5	-0.00000000000000014529	0.00000000000000014529
CFDM $(\alpha=0.1)$	13	0.00000000000000000001	0.00000000000000000001

อภิปรายผล

งานวิจัยชิ้นนี้เป็นการศึกษาระเบียบวิธีการทำซ้ำที่ใช้แนวคิดของการกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์ในการแก้สมการ $f(x)=0$ บนฟังก์ชันพีชคณิตไม่เชิงเส้น ซึ่งได้สูตรการทำซ้ำดังต่อไปนี้

1.

$$x_{n+1}=x_n+\frac{-3f'(x_n)\pm\sqrt{(3f'(x_n))^2-6(2\alpha+1)f''(x_n)f(x_n)}}{(2\alpha+1)f''(x_n)}$$

ถ้าเราเลือก α ให้อยู่ในช่วง $[0.5,0.9]$ จะมีการลู่เข้าดีกว่าค่าอื่น

2.

$$x_{n+1}=x_n+\frac{(-3f(x_n)+3f(x_{n-1}))(x_n-x_{n-1})\pm|x_n-x_{n-1}|\sqrt{[3(f(x_n)-f(x_{n-1}))]^2-(24\alpha+12)(-2f(x_n)+f(x_{n-1}))f(x_n)}}{(4\alpha+2)(-2f(x_n)+f(x_{n-1}))}$$

ถ้า α อยู่ในย่านใกล้เคียงกับ 0.1 จะมีการลู่เข้าดีกว่าค่าอื่น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร ที่ได้สนับสนุนทุนสำหรับทำวิจัยฉบับนี้

เอกสารอ้างอิง

He, J. H. (2003, February). A new iteration method for solving algebraic equations. **Applied Mathematics and Computation, 135**(1), 81-84.

Ide, N. A. D. (2008, February). A new hybrid iteration method for solving algebraic equations **Applied Mathematics and Computation, 195**(2), 772-774.